AL MT 2024
Cours 2.1

Ex 2 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_5 = 2 \\ x_6 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

variables libres : x_2, x_4, x_5
variables liées : x_1, x_3, x_6

nommons $x_2 = \alpha$
$x_4 = \beta$
$x_5 = \gamma$

et exprimons x_1, x_3, x_6 en fonction de α, β, γ

$$x_1 = 1 - x_2 - x_4 = 1 - \alpha - \beta$$

$$x_3 = 2 - x_5 = 2 - \gamma$$

$\Rightarrow$

$$S = \left\{ (1-\alpha-\beta, \alpha, 2-\gamma, \beta, \gamma, 3) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

il s'agit d'un "objet" de dim 3 (volume) dans $\mathbb{R}^6$

3) Équilibrer l'éq. chimique :

$$x\, Ca + y\, H_3PO_4 \to z\, Ca_3P_2O_8 + t\, H_2$$

càd trouver tous les nombres x, y, z, t t.q. l'éq. est équilibre

càd même nombre d'atomes à gauche et à droite

$$\begin{cases} x = 3z & \text{(pour Ca)} \\ y = 2z & \text{(pour P)} \\ 3y = 2t & \text{(pour H)} \\ 4y = 8z & \text{(pour O)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

matrice augmentée du système

ex ⇝ echelonnage

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

variable libre t

$$S = \left\{ \left(t, \tfrac{2}{3}t, \tfrac{1}{3}t, t\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

une droite dans $\mathbb{R}^4$ donnée sous forme paramétrique

de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

les chimistes ♡ les solutions à coordonnées entières (pour avoir des atomes entiers) et prenant $t = 3$ on trouve la plus petite sol entière

$$s_0 = (3, 2, 1, 3).$$

Théorème 2 (AL, thm 2 p. 23)

Soit ✯ un système linéaire, alors

A) le système ✯ est <u>compatible</u>
(càd possède au moins une solution
càd $S \neq \emptyset$)

si et seulement si la colonne de droite de la matrice <u>augmentée</u> du système $M^+_{✯}$

<u>n'est pas</u> une colonne-pivot.

càd, il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne de $M^+_{✯}$ (une fois échelonnée)

B) Si ✯ est compatible, alors l'ensemble solution contient

i) une solution <u>unique</u> s'il n'y a pas de variable libre
(càd que l'on a 1 pivot par variable)

ii) une infinité de solutions, s'il y a au moins une variable libre.

(càd, il y a moins de pivots que de variables)

ex : $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$ (syst. à paramètre $k \in \mathbb{R}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{l_1 - k l_3 \\ l_2 - l_3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right)$$

si $k \neq 1$ on divise par $k-1$ l_2 et l_3 $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1-k & -1 \end{array}\right)$

$$\underset{\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-k & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{-\ell_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ si $k \neq -2$ on divise par $k+2$ la ℓ_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\ell_2 + \ell_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/k+2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k+2 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$
$\ell_1 - \ell_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 1 - \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/k+2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k+2 \end{array}\right) \quad \frac{k+1}{k+2}$$

$\rightsquigarrow$
$\ell_1 - k\ell_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \overbrace{\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+2}}^{1/k+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/k+2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/k+2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \left\{ \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2} \right) \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } k \neq 1 \\ \text{et } k \neq -2 \end{array}}$$

cas $k=-2$

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pivot en dernière colonne

thm 2

$\Rightarrow$ système incompatible

$$S = \emptyset$$

cas $k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

forme échelonnée réd.

variables libres y, z

$y = s$
$z = t$

$$x + y + z = 1$$

$$x = 1 - s - t$$

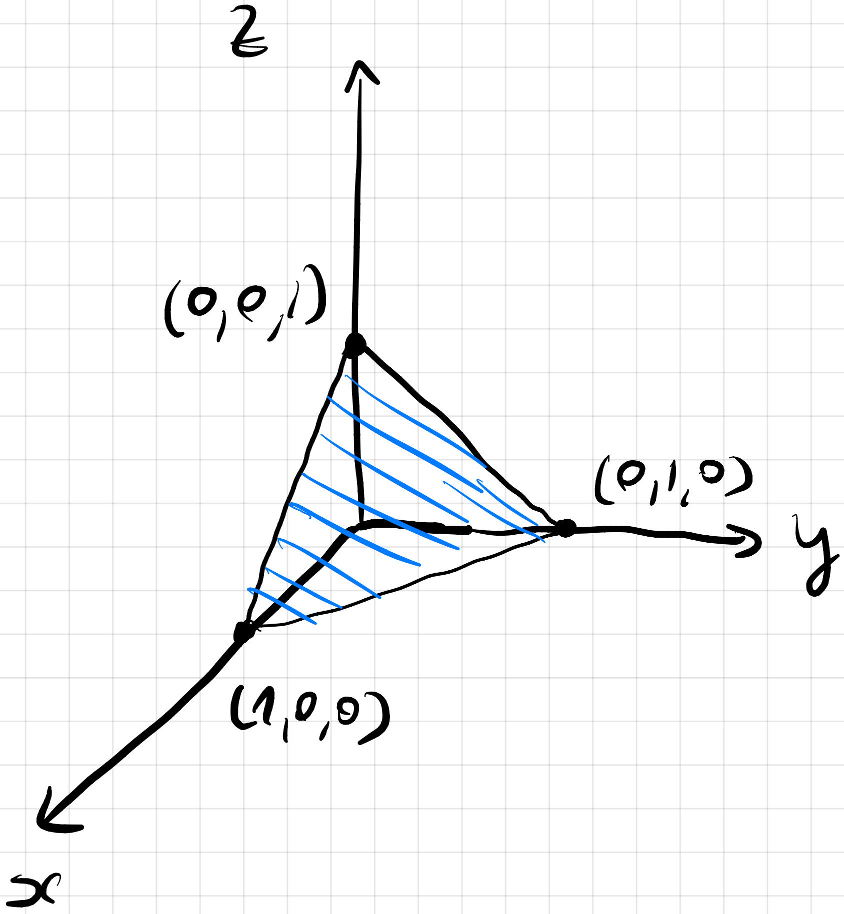
$$S = \{ (1-s-t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$$

un plan dans $\mathbb{R}^3$

or $(1-s-t, s, t)$ s'écrit

$$= (1,0,0) + s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$$

il s'agit bien du plan passant par $(1,0,0)$ et de vecteurs directeurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$



§ 1.3 Eq. vectorielles

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (AL p.29)

Déf : Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de tous les n-uplets (colonne) de la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{où } v_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

c'est une matrice $n \times 1$ (n lignes, 1 colonne)

on l'appelle un vecteur (colonne) à n coordonnées / composantes réelles

le nombre v_i s'appelle la ième coordonnée de $\vec{v}$

- vecteur nul (dans $\mathbb{R}^n$) : $\vec{0} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

• si $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

on écrit $\boxed{\vec{v} = \vec{w}}$ (equation vectorielle la + simple du monde)

si et seulement

$$v_i = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ainsi $\vec{v} \neq \vec{w}$ signifie

$$\exists\, i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q } v_i \neq w_i$$

($\mathbb{R}^n$ = l'espace euclidien de dim n)

Def : $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

somme : $\vec{v} + \vec{w}$ est définie par

$$\vec{v} + \vec{w} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

mult par un scalaire

$$\lambda \vec{v} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

cas part. : $\lambda = -1$

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} = \underline{\text{l'opposé de } \vec{v}}$$

(<u>Etymologie</u> : scalaire vient de "scala" "échelle")

<u>Propriétés de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$</u> (AL, p. 30)

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

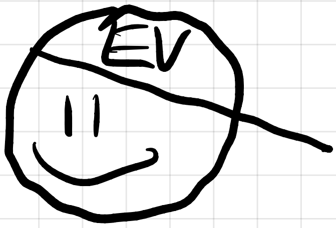
iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

v) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

vii) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

viii) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$



(Espace Vectoriel)

"algèbre avec les vecteurs"

$+ , \cdot$

Déf : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$ $\qquad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ des scalaires

alors le vecteur

$$\vec{v} := \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$$

s'appelle combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$

avec coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Une équation vectorielle dans $\mathbb{R}^n$ est une égalité de la forme

$$\boxed{x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_p \vec{a}_p = \vec{b}}$$

où $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sont données

et les x_i sont les variables/inconnues de l'équation vectorielle.

Rem : Une équation vectorielle

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$$

$\vec{a}_i, b \in \mathbb{R}^n$

a le même ensemble solution (dans $\mathbb{R}^p$) que le système linéaire $\ast$ dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_p & \vec{b} \end{array}\right)$$

matrice de taille $n \times (p+1)$

n lignes

$p+1$ colonnes

En particulier, le système $\ast$ admet au moins une solution si et seulement si $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$.

<u>ex</u> :

1) $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $n = 3$ $p = 2$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est C.L. de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$

$$\left(\vec{v} = 2\vec{v_1} + 3\vec{v_2} \right)$$

ce qui signifie que

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$ possède une solution $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

mais $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas C.L. de $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

en effet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

pivot en dernière colonne

donc pas de solution

en termes géométriques :

$\vec{w} \notin$ au plan engendré par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$

2) $\vec{0}$ est C.L de tous vecteurs

3) $\vec{v_i}$ est (banalement) C.L.
de $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$.

Déf : (Lay p 32) $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p} \in \mathbb{R}^n$

On définit

$$\text{Vect}\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\} := \left\{ \lambda_1 \vec{v_1} + \dots + \lambda_p \vec{v_p} \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, p \right\}$$

c'est l'ensemble de toutes les C.L.
des vect. $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$.

On l'appelle le sous-espace de $\mathbb{R}^n$
engendré par les vecteurs $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$

autres not. $\langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_p} \rangle \subset \mathbb{R}^n$

$\text{Lin}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$ $\quad$ $CL(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$

$\text{Span}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$

Rem : $W := \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\vec{0} \in W$
- $\vec{v}_i \in W$
- $\vec{b} \in W \iff$ le syst. $(\vec{v}_1 | \cdots | \vec{v}_p | \vec{b})$ admet au moins une solution
- W vérifie (EV) (W est un "sous-espace vectoriel" de $\mathbb{R}^n$)

Interprétation géométrique

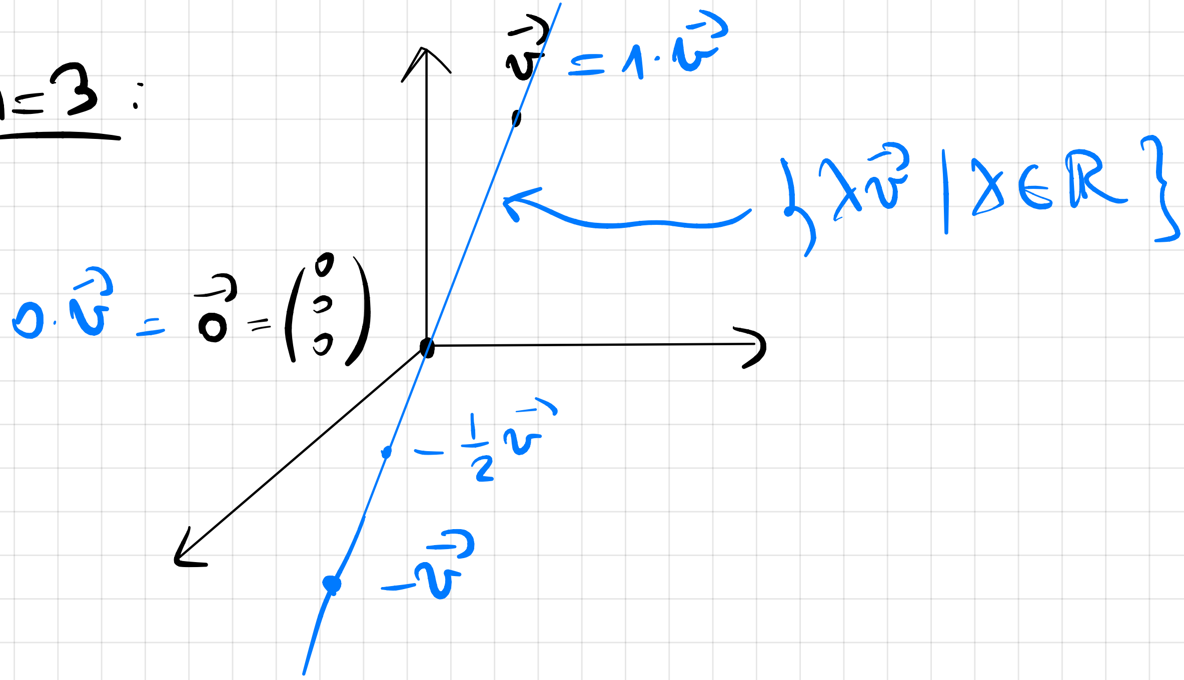
Cas $p = 1$: un seul vecteur (dans $\mathbb{R}^n$)

- si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\mathrm{Vect}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$
- si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\mathrm{Vect}\{\vec{v}\} =$ "la droite" passant par $\vec{0}$ et $\vec{v}$

$= $ tous les multiples de $\vec{v}$

$$= \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$n=3$:


$\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$
$\{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
$0 \cdot \vec{v} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}\vec{v}$
$-\vec{v}$